UNIVERSITÀ DI TRENTO

COLLEGIO CLESIO
UNIVERSITÀ DI TRENTO

Prova scritta - Matematica e Fisica - 20 maggio 2023

Il/la candidato/a scelga UNA ED UNA SOLA delle due tracce proposte e ne risolva tutti gli esercizi che è in grado di sviluppare (anche parzialmente). Motivare adeguatamente le risposte date, riportandone lo svolgimento nei dettagli.

Traccia numero 1

Esercizio 1. Si tracci nel piano cartesiano il grafico della funzione $f(x) = \log_e x$ (logaritmo naturale).

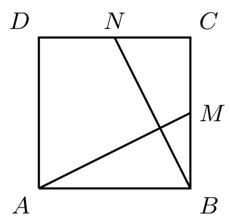
(a) Sia P un punto generico sul grafico di f, e si considerino il punto A di intersezione tra l'asse y e la retta tangente al grafico di f nel punto P, ed il punto B di intersezione tra l'asse y e la retta parallela all'asse x passante per P. Dimostrare che il segmento AB ha lunghezza costante, al variare di P sul grafico di f.

(b) Si consideri la funzione $g(x) = \log_a(x)$ dove la base a è un numero reale positivo e diverso da 1. La proprietà del punto precedente è ancora vera?

(c) Dire per quali valori della base a l'angolo formato tra la retta tangente al grafico di g nel punto di ascissa 1 e l'asse x vale $\frac{\pi}{4}$.

(d) Sia D la regione finita del primo quadrante delimitata dal grafico di f, dagli assi coordinati, e dalla retta di equazione $y = 1$. Determinare l'area di D.

Esercizio 2. Nel quadrato $ABCD$ di lato $\ell > 0$ siano M il punto medio del lato BC e N il punto medio del lato CD. Si determini l'area dell'intersezione tra i triangoli ABM e BCN.



Esercizio 3. Determinare tutte le soluzioni intere dell'equazione $y^2 = x^3 + 16$.

Esercizio 4. Trovare tutti i polinomi $p(x)$ a coefficienti reali tali che

$$p(p(x)) = x^2 p(3x)$$

per ogni numero reale x.

Esercizio 5. Sia $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ l'insieme dei numeri naturali e sia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una funzione non decrescente, cioè $f(n+1) \geq f(n)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, e con la proprietà

$$f(f(n)) = f(n^2) \qquad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

Se $f(11) = 7$, quanto vale $f(2023)$?

Esercizio 6. Cinque carte con i numeri da 1 a 5 vengono disposte casualmente una di seguito all'altra, in modo da formare un numero di cinque cifre. Qual è la probabilità che il numero così ottenuto sia divisibile per 4?

Esercizio 7. Un cane **C** parte all'istante $t = 0$ dall'origine **O** di un sistema di assi cartesiani x, y e si muove con velocità in modulo pari a V per inseguire una lepre **L** che parte, allo stesso istante $t = 0$, dal punto $(x = a, y = 0)$ e che si muove lungo la retta $x = a$ con la stessa velocità del cane. Ad ogni istante la velocità del cane è diretta lungo la congiungente $\mathbf{L} - \mathbf{C}$. Determinare la traiettoria percorsa dal cane.
Suggerimento: può essere utile osservare che, ad ogni istante, la lunghezza del tratto di curva percorso dal cane è uguale alla lunghezza del percorso (rettilineo) della lepre.

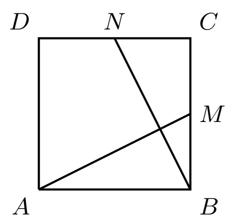
Traccia numero 2

Esercizio 1. Un punto materiale **P**, soggetto al peso, viene lanciato dal punto più basso **A** di una circonferenza Γ di raggio R, solidale a un sistema di riferimento inerziale e posta in un piano verticale, con velocità iniziale $\mathbf{v_A}$ diretta tangenzialmente alla circonferenza medesima. La circonferenza vincola il punto unilateralmente, vale a dire la distanza del punto **P** dal centro della circonferenza durante il moto potrà essere uguale a R o minore. La circonferenza è da considerarsi liscia, per cui gli attriti devono essere trascurati.

(a) Determinare il valore di $\mathbf{v_A}$ in modo che il distacco del punto materiale **P** da Γ avvenga esattamente dopo che il punto abbia percorso 120 gradi $(\frac{2}{3}\pi)$ a contatto con la circonferenza.

(b) Dare una formula che fornisca il valore di $\mathbf{v_A}$ in modo che il distacco avvenga dopo che il punto abbia percorso a contatto con la circonferenza un angolo generico compreso tra 90 e 270 gradi.

Esercizio 2. Nel quadrato $ABCD$ di lato $\ell > 0$ siano M il punto medio del lato BC e N il punto medio del lato CD. Si determini l'area dell'intersezione tra i triangoli ABM e BCN.



Esercizio 3. Determinare tutte le soluzioni intere dell'equazione $y^2 = x^3 + 16$.

Esercizio 4. Trovare tutti i polinomi $p(x)$ a coefficienti reali tali che

$$p(p(x)) = x^2 p(3x)$$

per ogni numero reale x.

Esercizio 5. Sia $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ l'insieme dei numeri naturali e sia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una funzione non decrescente, cioè $f(n+1) \geq f(n)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, e con la proprietà

$$f(f(n)) = f(n^2) \qquad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

Se $f(11) = 7$, quanto vale $f(2023)$?

Esercizio 6. Cinque carte con i numeri da 1 a 5 vengono disposte casualmente una di seguito all'altra, in modo da formare un numero di cinque cifre. Qual è la probabilità che il numero così ottenuto sia divisibile per 4?

Esercizio 7. Un cane **C** parte all'istante $t = 0$ dall'origine **O** di un sistema di assi cartesiani x, y e si muove con velocità in modulo pari a V per inseguire una lepre **L** che parte, allo stesso istante $t = 0$, dal punto $(x = a, y = 0)$ e che si muove lungo la retta $x = a$ con la stessa velocità del cane. Ad ogni istante la velocità del cane è diretta lungo la congiungente $\mathbf{L} - \mathbf{C}$. Determinare la traiettoria percorsa dal cane.
Suggerimento: può essere utile osservare che, ad ogni istante, la lunghezza del tratto di curva percorso dal cane è uguale alla lunghezza del percorso (rettilineo) della lepre.